

第2讲 勾股定理与逆定理

一、勾股定理

勾股定理

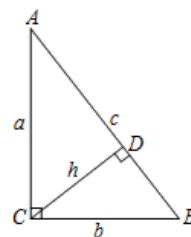
如果直角三角形的两条直角边长分别为 a 、 b ，斜边长为 c ，那么_____。

常见勾股数

 求直角三角形斜边上的高

如图所示，可得 $S_{\triangle ACB} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

$\therefore h = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



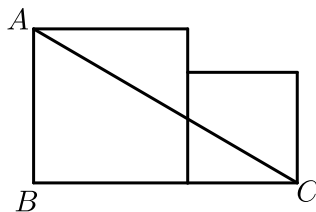
 例题

1. 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ，则下列式子中不成立的是（ ）。

A. $BC^2 = AB^2 + AC^2$ B. $AC^2 = BC^2 - AB^2$ C. $AB^2 = BC^2 - AC^2$ D. $AB^2 = AC^2 + BC^2$

 练习

2. 如图，两个正方形的面积分别为64和49，则 AC 等于（ ）。



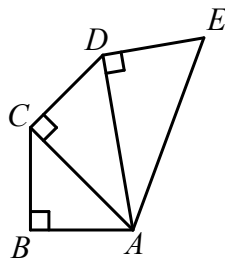
A. 15

B. 17

C. 23

D. 113

3. 如图所示, $AB = BC = CD = DE = 1$, $AB \perp BC$, $AC \perp CD$, $AD \perp DE$, 则 $AE = (\quad)$.



- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. 2

|| 例题

4. 一直角三角形的三边分别为2、3、 x , 那么以 x 为边长的正方形的面积为 $(\quad)$.

- A. 13 B. 5 C. 13或5 D. 4

|| 练习

5. 已知 x 、 y 为直角三角形的两边的长, 且满足 $\sqrt{2x + y - 10} + |x - y + 1| = 0$, 则第三边的长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

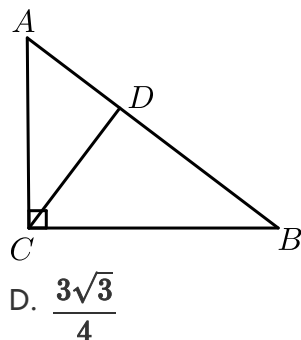
|| 例题

6. 一个直角三角形的两条直角边边长分别为3和4, 则斜边上的高为 $(\quad)$.

- A. 2 B. 2.2 C. 2.4 D. 2.5

|| 练习

7. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = 9$, $BC = 12$, 则点 C 到 AB 的距离是 $(\quad)$.



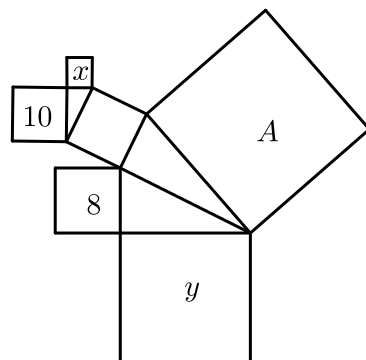
- A. $\frac{36}{5}$ B. $\frac{12}{25}$ C. $\frac{9}{4}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

8. 已知直角三角形的一直角边为 $\sqrt{5}$, 斜边上的高为2, 则这个直角三角形的斜边为 $(\quad)$.

- A. 3 B. 4 C. 5 D. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

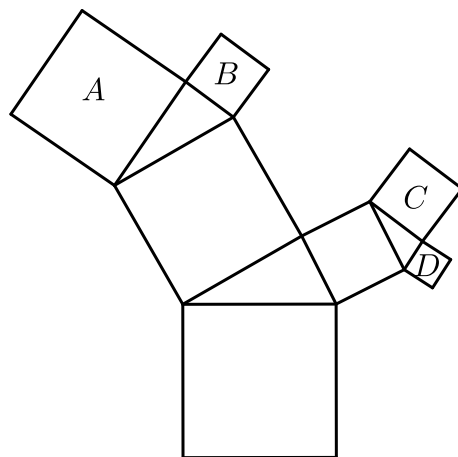
例题

9. 如图，图中的所有三角形都是直角三角形，所有四边形都是正方形，正方形 A 的边长为 $\sqrt{37}$ ，另外四个正方形中的数字 8 ， x ， 10 ， y 分别表示该正方形面积，则 x 与 y 的数量关系是 _____。



练习

10. 如图所有的四边形都是正方形，所有的三角形是直角三角形，正方形 A 的边长 8cm ， B 的边长为 6cm ， C 的边长为 4cm ， D 的边长为 3cm ，则最大的正方形的面积是（ ）。



A. $\sqrt{125}\text{cm}^2$

B. 125cm^2

C. $\sqrt{145}\text{cm}^2$

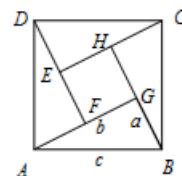
D. 145cm^2

二、勾股定理的证明

赵爽的“勾股圆方图”（又称“赵爽弦图”）

如图是由4个全等的直角三角形拼成的大正方形，直角三角形的两条直角边长分别为 a ， b （ $b > a$ ），斜边为 c ，中间是小正方形，且边长为 $(b - a)$ 。

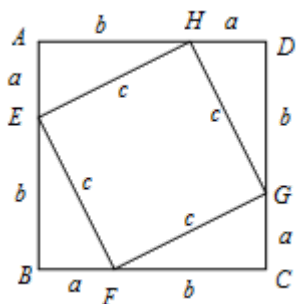
证明：



邹元治的证明

如图是由4个全等的直角三角形拼成的大正方形，直角三角形的两条直角边分别为 a 、 b ，斜边为 c ，中间是小正方形，且边长为 c 。

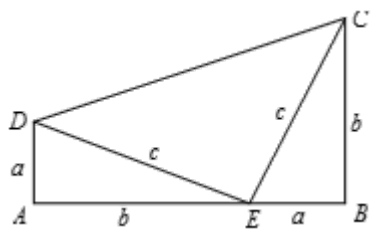
证明：



1976年美国总统詹姆斯·加菲尔德的证明

如图是由2个全等的直角三角形（以 a 、 b 为直角边，以 c 为斜边）和一个等腰直角三角形（以 c 为直角边）拼成的直角梯形。

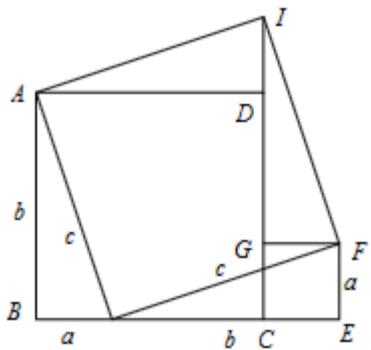
证明：



陈杰的证明

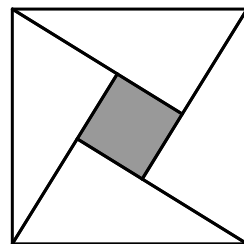
如图，图中有4个全等的直角三角形（以 a 、 b 为直角边，以 c 为斜边），3个正方形，边长分别为 a 、 b 、 c ，设整个图形面积为 S 。

证明：

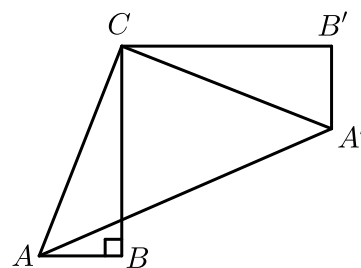


例题

11. 如图，由四个全等的直角三角形拼成如图所示的“赵爽弦图”，若直角三角形的斜边长为2，最短的边长为1，则图中阴影部分的面积为 _____ ．



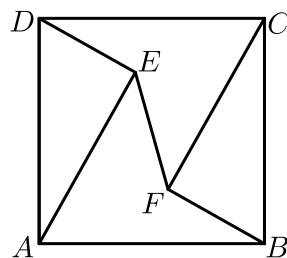
12. 如图， $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ， $BC = 4$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 C 逆时针旋转 90° ，得到旋转后的图形 $\triangle A'B'C$ ．



- (1) $\angle BCB'$ 的度数是 _____ (度) ．
- (2) AC 的长为 _____ ．
- (3) 求线段 AA' 的长 ．

练习

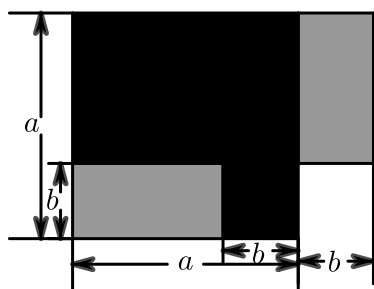
13. 如图，在正方形 $ABCD$ 中，分别以 AD ， BC 为斜边作 $\text{Rt}\triangle ADE$ 和 $\text{Rt}\triangle CBF$ ，且 $\text{Rt}\triangle ADE \cong \text{Rt}\triangle CBF$ ，连接 EF ，若 $S_{\text{正方形}ABCD} = 20$ ， $S_{\triangle ADE} = 3$ ，则 $EF =$ _____ ．



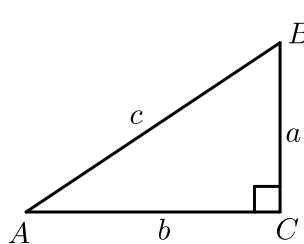
14. 阅读材料：

通过整式乘法的学习，我们进一步了解了利用图形面积来说明法则、公式等的正确性的方法，例如利用图甲可以对平方差公式 $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ 给予解释。

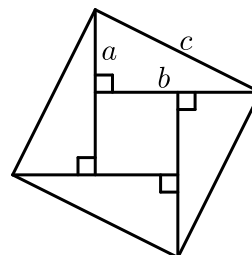
图乙中的 $\triangle ABC$ 是一个直角三角形， $\angle C = 90^\circ$ ，人们很早就发现直角三角形的三边 a, b, c 满足 $a^2 + b^2 = c^2$ 的关系，我国汉代“赵爽弦图”（如图丙）就巧妙的利用图形面积证明了这一关系。



图甲

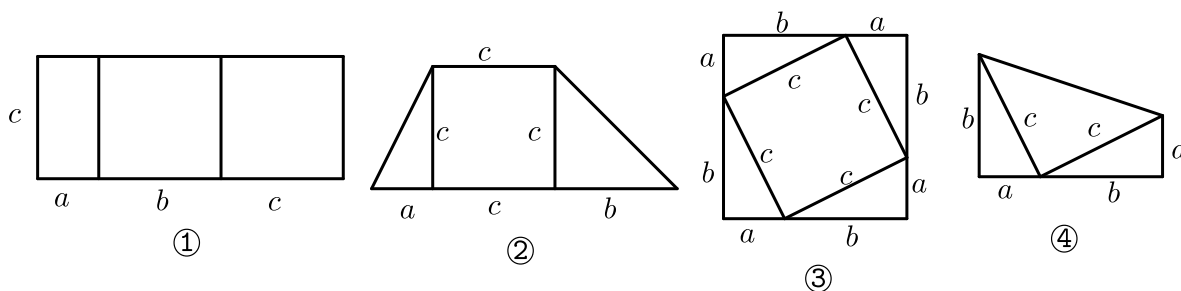


图乙

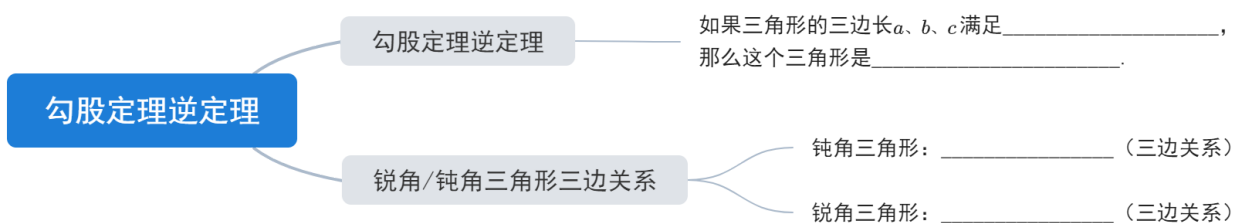


图丙

请回答：下列几何图形中，可以正确的解释直角三角形三边这一关系的图有 _____。（直接填写图序号）



三、勾股定理逆定理



例题

15. 在下列由线段 a, b, c 的长为三边的三角形中，不能构成直角三角形的是（ ）。

A. $a = 40, b = 50, c = 60$

B. $a = 1.5, b = 2, c = 2.5$

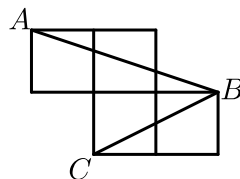
C. $a = \frac{5}{4}, b = 1, c = \frac{3}{4}$

D. $a = 7, b = 24, c = 25$

16. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c , 且满足 $(a-5)^2 + |b-12| + \sqrt{c-13} = 0$, 则 $\triangle ABC$ () .

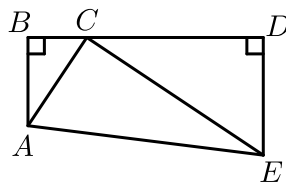
- A. 不是直角三角形
B. 是以 a 为斜边的直角三角形
C. 是以 b 为斜边的直角三角形
D. 是以 c 为斜边的直角三角形

17. 如图, 每个小正方形的边长为1, A, B, C 是小正方形的顶点, 则 $\angle ABC$ 的度数为 () .



- A. 90°
B. 60°
C. 45°
D. 30°

18. 如图, 已知 $\text{Rt}\triangle ABC$ 与 $\text{Rt}\triangle CDE$ 有一个公共点 C , 其中 $\angle B = \angle D = 90^\circ$, 若 $AB = 3$, $BC = 2$, $CD = 6$, $DE = 4$, $AE = \sqrt{65}$. 求证: $\angle ACE = 90^\circ$.



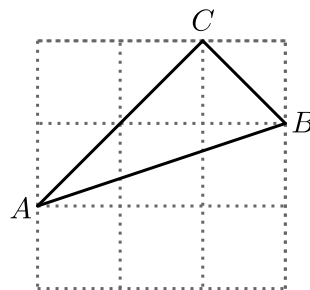
练习

19. 下列说法正确的有 () .

- ①如果 $\angle A + \angle B = \angle C$, 那么 $\triangle ABC$ 是直角三角形; ②如果 $\angle A : \angle B : \angle C = 1 : 2 : 3$, 则三角形是直角三角形; ③如果三角形的三边长分别为4、4、6, 那么这个三角形不是直角三角形; ④有一个角是直角的三角形是直角三角形.

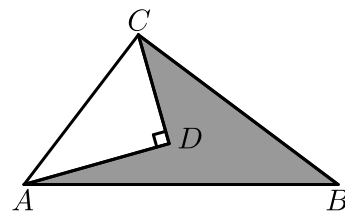
- A. 1个
B. 2个
C. 3个
D. 4个

20. 如图, 在 3×3 的正方形网格中, 每个小正方形的边长都为1, $\triangle ABC$ 的三个顶点均在格点上, 则 AB 边上的高为 () .



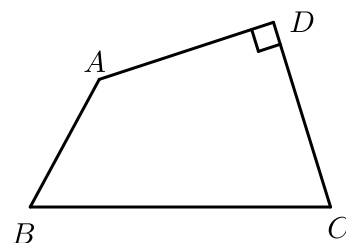
- A. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$
B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$
C. $\frac{\sqrt{10}}{10}$
D. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

21. 如图所示的一块地（图中阴影部分）， $\angle ADC = 90^\circ$ ， $AD = 12$ ， $CD = 9$ ， $AB = 25$ ， $BC = 20$ 。



- (1) 求 $\angle ACB$ 的度数。
(2) 求阴影部分的面积。

22. 如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle D = 90^\circ$ ， $AB = 2$ ， $BC = 4$ ， $CD = AD = \sqrt{6}$ 。



- (1) 求 $\angle BAD$ 的度数。
(2) 求四边形 $ABCD$ 的面积。

例题

23. $\triangle ABC$ 的三边长为4cm、5cm、6cm，则 $\triangle ABC$ 的形状是（ ）。

A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 钝角三角形 D. 不能判定

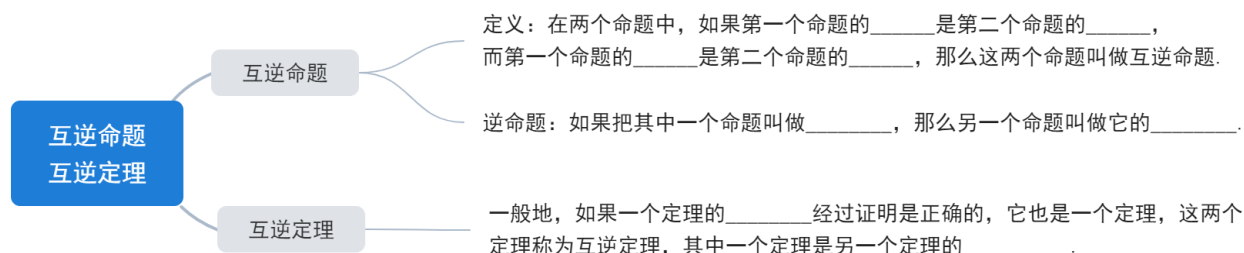
练习

24. 在 $\triangle ABC$ 是锐角三角形， $AB = 5$ ， $AC = 12$ ， $BC = a$ ，则 a 的取值范围是 _____。

25. 下列长度的三条线段能组成钝角三角形的是（ ）。

A. 3, 4, 4 B. 3, 4, 5 C. 3, 4, 6 D. 3, 4, 7

四、互逆命题与互逆定理



|| 例题

26. 下列命题中错误的是（ ）。

- A. 任何一个命题都有逆命题
- B. 一个真命题的逆命题可能是真命题
- C. 一个定理不一定有逆定理
- D. 任何一个定理都没有逆定

27. 命题“直角三角形的两个锐角互余”的逆命题是_____。

|| 练习

28. 有下列命题：①真命题都是定理；②定理都是真命题；③假命题不是命题；④公理都是命题。其中真命题有（ ）。

- A. 2个
- B. 3个
- C. 4个
- D. 1个

29. 下列命题：①若 $|a| > |b|$ ，则 $a > b$ ；②直角三角形的两个锐角互余；③如果 $a = 0$ ，那么 $ab = 0$ ；

④4个角都是直角的四边形是正方形。

其中，原命题和逆命题均为真命题的有（ ）。

- A. 0个
- B. 1个
- C. 2个
- D. 3个

30. 命题“两直线平行，同位角相等”的逆命题是_____。